

Nummer	135630	Emne	Mekanik, stive legemer, præcisionsmålinger		
Version	2016.08.15 / HS	Type	Elevøvelse	Foreslås til	gymA p. 1/4

## Formål

Bestemmelse af den lokale tyngdeacceleration  $g$  med stor nøjagtighed.

## Princip

Apparatet er en model af et såkaldt **reversionspendul**. Navnet refererer til, at pendulet kan endevendes – der er et ophængspunkt i hver ende. Reversionspendulet opbygges, så ophængspunkterne har forskellig afstand til massemidtpunktet og justeres derefter, så det har samme svingningstid om de to ophængspunkter.

Herefter kan  $g$  let beregnes.

## Apparatur

Apparatet består af en stålstang med en række huller, som dels anvendes som pendulets leje, dels bruges til fastgørelse af lodder. Den faste del af lejet udgøres af en solid knivssæg, som fastgøres til normalt stativmateriale eller endnu bedre en bordkant.

Apparatet leveres med 4 skiver af stål og 2 skiver af aluminium. Skiverne anvendes parvis – anbragt på hver side af stålstangen med en bolt. To skiver, to spændeskiver, en bolt og en møtrik kaldes herefter et *lod*.

Der medfølger to ekstra sæt bolte og møtrikker, som anvendes som "trimmelodder" samt 4 spændeskiver, som bruges sammen med de store lodder.

Reversionspendulet blev udviklet af Henry Kater. Princippet blev forfinet af F. W. Bessel, og hans version kan demonstreres med dette apparat (om end nøjagtigheden ikke er så høj som i de klassiske præcisionspenduler). **Besselpendulet** er et reversionspendul, som er volumenmæssigt (geometrisk) symmetrisk, selv om massefordelingen er asymmetrisk. Det viser sig, at fejlkilder, som skyldes luftens tilstedeværelse, derved forsvinder. (Det drejer sig om hhv. opdriften og om, at en smule luft vil svinge sammen med pendulet, som derfor synes tungere.) For detaljer henvises til litteraturfortegnelsen



## Måling af svingningstid

### Med stopur

Man måler tiden for et antal *hele* svingninger og dividerer med antallet. Præcisionen øges, hvis man starter og stopper uret, når pendulet passerer sit laveste punkt, hvor dets hastighed er størst. Sigt efter noget lodret bag pendulet, og flyt ikke hovedet mellem start og stop.

I praksis kan man næppe opnå lavere usikkerhed end 0,2 s.

Ønskes en nøjagtighed på f.eks. 0,5 %, skal den samlede måletid således være mindst 40 s.

Med Besselpendulet bør man ikke stille efter ringere nøjagtighed end 0,1%, svarende til mindst 200 sekunders måletid.

### Med dataopsamlingsudstyr

Placér en bevægelsessensor ca. 20 cm fra pendulet ud for et lod. (Det kræver held at måle på stangen alene, men det kan lade sig gøre.) Indstil dataopsamlingsprogrammet til at registrere *position* med en målefrequens på f.eks. 100 Hz. Kontrollér, at der

opsamles en nogenlunde sinusformet kurve – der må ikke være sære takker, som indikerer, at sensoren rammer ved siden af målet.

Mål i "passende lang tid" – ca. et minut.

Tilpas en *dæmpet svingning* til målepunkterne. Sørg for at indstille programmet, så der vises tilstrækkeligt mange cifre på parametrene!

Nogle programmer afleverer direkte svingningstiden  $T$ , andre bruger  $\omega = 2\pi/T$ .

### Med fotocelle og tæller

Hæng pendulet lodret og helt i ro. Anbring fotocellen, så lysstrålen lige akkurat "rører" en lodret kant nederst på pendulet (kanten af stangen eller evt. kanten af et lod – se foto).

Fotocelle type 197550 har en grøn lysdiode,



som slukker, når lysstrålen afbrydes.

Når pendulet svinger (små udsving!), skal lysstrålen være afbrudt i hele den ene halvperiode og passere i hele den anden. Derved bliver en svingningstid netop tiden fra starten af en afbrydelse til den næste.

Med **tæller 200250** er proceduren som følger

Fotocellen sættes i DIN-bøsning A

1. Træk pendulet en smule væk fra lysstrålen under de følgende punkter
2. Tryk *Select*, indtil lampen ud for *Period* lyser
3. Vent, indtil der er lys i lampen *Continuous*, tryk derefter på *Memory/Continuous*
4. Tryk til sidst på *Start/Stop*
5. Herefter kan pendulet slippes

Resultaterne vises som gennemsnit af to svingningstider.

### Med SpeedGate

SpeedGate har to lysstråler; vi bruger kun stråle "X".

Der er en markering i displayet, som tændes, når lysstrålen er afbrudt. Med pendulet i ro skal lysstrålen netop strejfe kanten af pendulstangen.

Brug kun små udsving: Lysstrålen skal være afbrudt i den halve periode. Vælg *Period* og *Mean Period* (ikke *Pendulum Period*).

1. Sæt pendulet i små svingninger
2. Tryk *Reset*
3. Aflæs middelperioden efter den ønskede måletid er gået.



### Udførelse

Monter to stålskiver med bolt og to spændeskiver i det yderste hul i stangens ene ende og de to aluminiumskiver i den modsatte ende – *ligeledes med to spændeskiver*.

Pendulet skal ophænges i det næstyderste hul i hver ende – dvs. at de yderste *frie* huller anvendes. Knivlejet spændes fast til en bordkant – almindeligt stativmateriale er ikke stabilt nok. Et bord, som er boltet fast i væggen er bedst.

Ophængspunktet i enden med stålloppet kaldes  $O_1$ , ophængspunktet ved aluminiumloppet kaldes  $O_2$ . De to tilsvarende svingningstider kalder vi  $T_1$  og  $T_2$ .

Det er nødvendigt med meget præcise målinger af svingningstiderne. Med stopur skal man måle over i hvert fald 150 svingninger.

Korrekt anvendt vil fotoceller eller dataopsamlingsudstyr være stopuret overlegent.

*Amplituden skal være lille*. En halv centimeters udsving er nok.

Trimmelodderne, som udgøres af en bolt med møtrik, skal hele tiden placeres symmetrisk om stangens midtpunkt. Start med at placere dem i de to huller 50 mm fra centret.

Benyt ophængspunktet  $O_1$  og mål  $T_1$ . Vend pendulet, så  $O_2$  benyttes, og mål  $T_2$ .

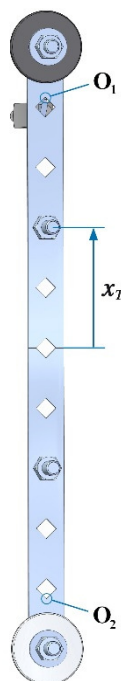
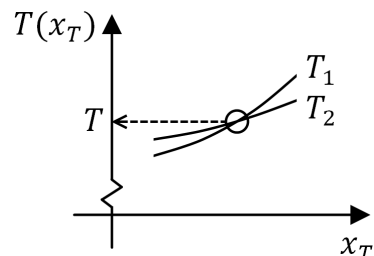
Flyt trimmelodderne symmetrisk til næste hul og gentag. Ditto for det sidste ledige hul.

Svingningstiden varierer, når trimmelodderne flyttes. Når de er så tæt på hinanden som muligt, vil  $T_1$  være mindre end  $T_2$ .

Omvendt, når trimmelodderne er så langt fra hinanden som muligt, så er svingningstiden  $T_2$  mindre end  $T_1$ . For en eller anden afstand må

de to svingningstider være ens. Vi søger den nøjagtige værdi af denne fælles svingningstid  $T$ :

Benyt et regneark til at afbilde  $T_1$  og  $T_2$  som funktion af afstanden  $x_T$  fra centret til trimmelodderne. Lad regnearket tilføje parabler som "tendenslinjer" (i Excel kaldes typen for "polynomisk" med "rækkefølge" 2). Tilføj tilstrækkeligt med vandrette inddelinger på  $y$ -aksen, og aflæs den fælles svingningstid, hvor graferne krydser hinanden.



Den sidste måling, vi behøver, er afstanden  $\Delta x$  mellem  $O_1$  og  $O_2$ . Der skal måles fra øverste kant af det øvre hul til nederste kant af det nedre. Med et målebånd og en lup bør det kunne gøres med en nøjagtighed på omkring 0,25 mm.

Nu kan den lokale tyngdeacceleration bestemmes:

$$g = \Delta x \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Svingningstiden bør være bestemt så præcist, at det er målingen af  $\Delta x$ , som afgør nøjagtigheden. På de klassiske præcisionspenduler kunne denne afstand f.eks. være opmålt vha. interferometri.

## Teori

**Svingningstiden** for et fysisk pendul er givet ved

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mga}}$$

hvor  $I$  er inertimomentet om omdrejningsaksen,  $M$  er den samlede masse,  $a$  er afstanden mellem omdrejningsaksen og massemidtpunktet,  $g$  er tyngdeaccelerationen.

Kaldes et legemes inertimoment om en akse gennem dets tyngdepunkt for  $I_G$ , kan inertimomentet  $I$  om en vilkårlig anden akse, som er parallel med den første, bestemmes vha. **Steiners sætning**:

$$I = I_G + Ma^2$$

Her er  $M$  igen det betragtede legemes masse og  $a$  er afstanden mellem de to akser.

Denne sætning er uhyre nyttig ved beregning af inertimomenter, når man ser bort fra de allermost simple tilfælde.

Inertimomentet om  $O_1$  hhv.  $O_2$  kaldes  $I_1$  hhv.  $I_2$ .

Afstanden mellem  $G$  og  $O_1$  betegnes  $x_1$  og afstanden mellem  $G$  og  $O_2$  kaldes  $x_2$ .

Vi har nu ifølge Steiners sætning

$$I_1 = I_G + M \cdot x_1^2 \quad I_2 = I_G + M \cdot x_2^2$$

De to svingningstider er da givet ved

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_G + M \cdot x_1^2}{M \cdot x_1 \cdot g}} \quad T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{I_G + M \cdot x_2^2}{M \cdot x_2 \cdot g}}$$

Hvis  $T_1 = T_2$ , ses at

$$\frac{I_G + M \cdot x_1^2}{x_1} = \frac{I_G + M \cdot x_2^2}{x_2}$$

Under forudsætning af, at  $x_1 \neq x_2$ , kan denne ligning løses mht.  $I_G$

$$I_G = M \cdot x_1 \cdot x_2$$

Svingningstiden bliver da

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{x_1 + x_2}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\Delta x}{g}}$$

– hvor betegnelsen  $\Delta x$  står for afstanden mellem ophængspunkterne.

## Sammenligningsgrundlag

Den eksperimentelt bestemte værdi af  $g$  kan sammenlignes med den teoretiske værdi for den glatte jord-ellipsoide (geoiden), med korrektion for højden:

$$g = 0,0002269 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin^4(\varphi) + 0,0516323 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin^2(\varphi) + 9,780327 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + C_{FA} + C_B$$

Her er  $\varphi$  stedets breddegrad, mens højdekorrektionen er opdelt i to led  $C_{FA}$  og  $C_B$ . (Free Air-korrektion og Bouguer-korrektion). De repræsenterer hhv. en reduktion af  $g$  pga. større afstand til jordens centrum og en forøgelse af  $g$  pga. øget tyngde fra det ekstra jordlag:

$$C_{FA} = -3,086 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2} \cdot h$$

$$C_B = 4,193 \cdot 10^{-10} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1} \cdot \rho \cdot h$$

Her er  $h$  stedets højde over havniveau.

I  $C_B$  indgår  $\rho$  – den gennemsnitlige massefylde af jordlagene mellem havniveau og positionen. Anvendes en typisk massefylde på  $2670 \text{ kg/m}^3$ , kan disse to korrektioner samles til:

$$C(h) = C_{FA} + C_B = -1,966 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2} \cdot h$$

I praksis er det nemmest at finde stedets breddegrad vha. en tjeneste som Google Maps. Højden over havet kan man ofte finde via kommunens hjemmeside – søg efter en afdeling med geografiske data ("GIS"). Eller benyt et godt kort.

## Diskussion og evaluering

Overvej grundigt størrelsen af den samlede måleusikkerhed på  $g$ .

Sammenlign den fundne værdi med den teoretiske, højdekorrigerede værdi for en glat, ellipsoideformet jord.

Har målingen evt. påvist en lokal variation i  $g$ ?

## Litteratur

D. Candela, K. M. Martini, R. V. Krotkov, and K. H. Langley:

*Bessel's improved Kater pendulum in the teaching lab*  
American Journal of Physics - June 2001 - Volume 69, Issue 6, pp. 714

## Noter til læreren

### Benyttede begreber

Massemidtpunkt,  
inertimoment  
– forudsættes kendt

Steiners sætning,  
svingningstid for fysisk pendul  
– resumeres i teoriafsnittet

Reversionspendul  
– formlen for svingningstiden er udledt.

### Matematiske forudsætninger

Indsættelse i formler  
Graftegning

### Om apparaturet

Besselpendulet bør behandles forsigtigt. Knivlejerne (herunder hjørnerne af de firkantede huller) bør ikke udsættes for overbelastning. Hjørnerne har en lille runding, som efterlader plads omkring kniven. Får de et hak, vipper kniven ikke frit, og det bliver sværere at måle afstanden mellem ophængene.

(Under udvikling af denne øvelsesvejledning blev opnået en afvigelse på ca. 0,4 ‰ ift. værdien for den højdekorrigerede geoide.)

På [www.frederiksen.eu](http://www.frederiksen.eu) ligger der færdige regneark til bestemmelse af inertimomenterne mv.

Søg på varenummer 218100

## Detaljeret apparaturliste

### Specifikt for eksperimentet

218100 Fysisk pendul / Bessel-pendul  
001510 Skruetvinge

### Større apparater

*Valgfrit:* Tidtagning med SpeedGate  
197570 SpeedGate

*Valgfrit:* Tidtagning med fotocelle og timer  
200250 Elektronisk tæller  
197550 Fotocelle

*Valgfrit:* Tidtagning med dataopsamlingsudstyr  
Bevægelsessensor  
Link til PC eller datalogger

### Diverse standardudstyr

001600 Bordklemme  
002310 Stativmuffe, firkantet (2 styk anvendes)  
000850 Stativstang 25 cm  
000820 Stativstang 75 cm

## Reklamationsret

*Der er to års reklamationsret, regnet fra fakturadato. Reklamationsretten dækker materiale- og produktionsfejl.*

*Reklamationsretten dækker ikke udstyr, der er blevet mishandlet, dårligt vedligeholdt eller fejlmonteret, ligesom udstyr, der ikke er repareret på vort værksted, ikke dækkes af garantien.*

*Returnering af defekt udstyr som garantireparation sker for kundens regning og risiko og kan kun foretages efter aftale med Frederiksen. Med mindre andet er aftalt med Frederiksen, skal fragtbeløbet forudbetales. Udstyret skal emballeres forsvarligt.*

*Enhver skade på udstyret, der skyldes forsendelsen, dækkes ikke af garantien. Frederiksen betaler for returnering af udstyret efter garantireparationer.*

© Frederiksen Scientific A/S

*Denne brugsvejledning må kopieres til intern brug på den adresse hvortil det tilhørende apparat er købt. Vejledningen kan også hentes på vores hjemmeside*